6. *Дорренс У.Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Мир, 1966. - 439 с.

7. *Дородницын А.А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе // Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. - С. 140–173.

О ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

Долженко Е.П.
Московский государственный университет

По теореме Каратеодори всякое (однолистное) конформное отображение $w = f(z)$ одной односвязной области G_1 с жордановой границей Γ_1 на другую односвязную область G_2 с жордановой границей Γ_2 продолжается на Γ_1 до гомеоморфизма $\overline{G}_1 = G_1 \cup \Gamma_1$ на $\overline{G}_2 = G_2 \cup \Gamma_2$. Возникает вопрос о количественных связях гладкостных свойств f на $\overline{G}_1$ со свойствами Γ_1 и Γ_2. Для гладких Γ_1 и Γ_2 он решается теоремами Келлога, Варшавского и др. Содержательная оценка модуля непрерывности $\omega(f, \overline{G}_1, \delta)$ функции f на $\overline{G}_1 = \overline{D}$ при $D := \{z : |z| < 1\}$ и любой односвязной жордановой области $G_2 = G$ получена в [1], где "качество" жордановой кривой Γ (не обязательно замкнутой) определяет ее модуль колебания $d(\Gamma; \delta) = \sup\{d(\Gamma; z, t) : z, t \in \Gamma, |z - t| \leq \delta\}$ $(\delta \geq 0)$. Здесь $d(\Gamma; z, t)$ – меньший из диаметров дуг кривой Γ, соединяющих z с t. Положим еще $m(\Gamma; \delta) = \sup\{\mathrm{mes}_1(\Gamma; z, t) : z, t \in \Gamma, |z - t| \leq \delta\}$ $(\delta \geq 0)$ (для спрямляемой Γ), где $\mathrm{mes}_1(\Gamma; z, t)$ – меньшая из длин дуг кривой Γ, соединяющих z с t. Очевидно, функции $m(\Gamma; \delta)$ и $d(\Gamma; \delta)$ обе не убывают, $m(\gamma; \delta) \geq d(\Gamma; \delta) \geq \delta$. Если Γ – замкнутая жорданова кривая, или жорданова дуга с концами, то $d(\Gamma; \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, если же Γ спрямляема, то $d(\Gamma; \delta) \to 0$, $m(\Gamma; \delta) \to 0 (\delta \to 0)$. Приведем еще одно обозначение из [1]. Пусть $g(x)$ не убывает при $x \geq 0$, $g(x) \geq x$, $g(0) = g(0+) = 0$, $\overline{g}(x) := g(x) + x$, $h(x) := (\overline{g}(\sqrt{x}))^2$. Функция $H_g(x) = -\int_x^a \frac{dt}{h^{-1}(t)}$ $(a = \mathrm{const} > 0$, например, $a = 1)$ выпукла вверх и строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому $H_g^{-1}(x)$ определена, положительна, выпукла вниз и возрастает на $[-\infty, +\infty]$, $H_g^{-1}(x) \to 0 =: H_g^{-1}(-\infty)$ при $x \to -\infty$, $H_g^{-1}(x) \to +\infty =: H_g^{-1}(+\infty)$ при $x \to +\infty$. Обозначим через $J(g)$ и $J_0(g) \subset J(g)$ семейства всех таких жордановых кривых Γ, что $d(\Gamma, \delta) \leq g(\delta)$ и $m(\Gamma, \delta) \leq g(\delta)$ соответственно $(\forall \delta \geq 0)$.

Теорема 1. *Пусть $w = \varphi(z)$ – конформное отображение ограниченной области G с жордановой границей $\Gamma \in J(g)$ на круг D, $z = \psi(w)$ – конформное отображение D на G. Тогда*

$$\omega(\varphi, \overline{G}, \delta) \leq A\sqrt{g(\delta)} \qquad \forall\delta \geq 0 \quad (A = A(g, \varphi)), \tag{1}$$

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \leq Bg\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}H_g^{-1}(\lambda \log \delta)}\right) \qquad \forall\delta \geq 0 \quad (B = B(g, \psi)), \tag{2}$$

где $\lambda = 4/\pi^2$ при $\Gamma \in J(g)$, $\lambda = 4$ при $\Gamma \in J_0(g)$.

Неравенство (1) получается с помощью теоремы М. А. Лаврентьева [2] и теоремы П. М. Тамразова [3], (2) доказано в [1].

Обобщением теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает ограниченную область G с жордановой границей $\partial G \in J(g)$ на ограниченную область Q с жордановой границей $\partial Q \in J(q)$. Тогда*

$$\omega(f, \overline{G}, \delta) \leq Cq\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}H_q^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\log g(\delta)\right)}\right) \qquad (\delta \geq 0), \tag{3}$$

где C не зависит от δ, $\lambda = 4/\pi^2$ при $G \in J(q)$, $\lambda = 4$ при $G \in J_0(q)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы 2 имеем $g(\delta) \leq M\delta^\mu$, $q(\delta) \leq N\delta^\nu$, где M, N, μ, ν – положительные постоянные, $0 < \mu, \nu \leq 1$, то*

$$\omega(f, \overline{G}, \delta) \leq E\delta^k, \qquad k = \mu(\pi(N+1))^{-2} \text{ – при } 0 < \mu \leq 1 \text{ и } \nu = 1 \ (\delta \geq 0);$$

$$\omega(f, \overline{G}, \delta) \leq F|\log\delta|^{-r}, \quad r = \frac{\nu^2}{2(1-\nu)} \text{ – при } 0 < \mu \leq 1, ,$$
$$0 < \nu < 1 (0 \leq \delta < 1)$$

где E и F не зависят от δ.

Теорема 3. *Пусть G – односвязная область, γ – открытая достижимая (жорданова) граничная дуга этой области, $\gamma \in J(g)$. Тогда если $w = f(z)$ – конформное отображение G на область Q, $\kappa = f(\gamma)$ – открытая достижимая граничная дуга области Q, $\kappa \in J(q)$, σ – замкнутая поддуга дуги γ, то для некоторой области $g \supset \sigma$ имеем:*

$$\omega(f, \overline{G \cap g}, \delta) \leq Cq\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}H_q^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\log g(\delta)\right)}\right) \quad (\delta \geq 0), \tag{4}$$

где C не зависит от δ, а $\lambda = 4/\pi^2$ при $G \in J(q)$, $\lambda = 4$ при $G \in J_0(q)$.

Работа поддержана фондом РФФИ (проект 96-01-01366) и Лабораторией экстремальных задач Научного центра по проблемам Каспийского моря при Дагестанском университете.

Литература

1. *Долженко Е.П.* Замечания о модуле непрерывности конформного отображения круга на жорданову область//Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – N 2. – С. 176–184.

2. *Лаврентьев М.А.* О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях//Докл. АН СССР. – 1936. – Т. 4. – N 5. – С. 207–209.

3. *Тамразов П.М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного //Успехи матем. наук. – 1973. – Т. 28. – Вып. 1 (169). – С. 131–161.

UPPER ESTIMATES OF AIRFOIL AERODYNAMIC CHARACTERISTICS FOR A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW

Elizarov A.M., Fokin D.A.
Chebotarev Institute of Mathematics and Mechanics
Kazan State University

In the present work the method of the inverse boundary-value problems is used to obtain upper estimates for two main integral airfoil characteristics: the lift coefficient C_l and the aerodynamic ratio K in a certain class of airfoils flown by an incompressible flow of a viscous fluid at a fixed angle of attack at high Reynolds number ($10^6 \div 10^7$) with the presence of a thin non-separating turbulent boundary layer.

1. Introduction. Problems of airfoil shape optimization to attain extremal aerodynamic characteristics are the subject of special interest for researchers working in the field of applied and theoretical hydro- and gasdynamics [1, 2]. One of the approaches, allowing to give correct variational formulations and obtain explicit solutions of airfoil optimizations problems, is connected with the theory of inverse boundary-value problems [3, 4]. Its efficiency is determined by the fact that in the reference of certain